

一般化速度型 Space-Time 有限要素法と動的応答解析  
Generalized velocity-based Space-Time FEM for elastodynamics

○黒田有紀・ビカス シャルマ・藤澤和謙

Yuki KURODA・Vikas SHARMA・Kazunori FUJISAWA

1. はじめに

近年の激甚化する自然災害に対応するため、農業用ダムの安全性評価が継続的に進められている。特に重要視される大地震を想定した構造物の動的計算は、これまで以上に安定かつ高精度な時間積分法を要求するため、その高度化は研究対象となり続ける。著者らは、空間、時間の両方向に有限要素を利用し、構造物の動的計算を対象とした速度型 Space-Time 有限要素法 (v-ST/FEM) を提案した。同手法は無条件安定かつ 3 次精度以上の時間積分性能を有するが、精度を落とすことなく高周波成分の減衰を与えられない点が課題である。一方、v-ST/FEM と同等の時間積分性能を有し、高周波成分が十分に減衰する特性をもつ手法に、変位速度型 Space-Time 有限要素法 (uv-ST/FEM) がある。本論では、この 2 手法を一般化した Generalized v-ST/FEM を提案し、これに基づいた 3 次元弾性体の動的応答解析の結果を示す。

2. Generalized v-ST/FEM

Generalized v-ST/FEM を示すにあたり、時間領域  $(0, T)$  を  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_N=T$  のように  $N$  個の区間に分割したときの  $n$  ( $\leq N$ ) 番目時間要素  $I_n=(t_n, t_{n+1})$  を考える。uv-ST/FEM と v-ST/FEM は、変位と速度の時間方向における扱いと未知数の数が異なる。uv-ST/FEM では式(1a)と運動方程式の 2 つの式を同時に Space-Time 有限要素法で解く。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_n) + \int_{t_n}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad \forall t \in I^n \quad (1ab)$$

その中では、変位と速度は異なる未知数として扱われる。一方 v-ST/FEM では、式(1b)より変位を速度から直接積分して与え、運動方程式のみを解く。このとき速度のみが未知数となる。変位に注目すると、uv-ST/FEM では変位が時間要素の端点で不連続となり  $\mathbf{u}_n^- \neq \mathbf{u}_n^+$  であるが、v-ST/FEM では変位は連続的に扱われ、 $\mathbf{u}_n^- = \mathbf{u}_n^+ = \mathbf{u}_n$  である ( $\mathbf{u}_n^- = \mathbf{u}(t_n-0)$ ,  $\mathbf{u}_n^+ = \mathbf{u}(t_n+0)$ )。

ここで、式(1a)を線形形状関数  $T^1, T^2$  で定式化したものと、式(1b)を  $T^1, T^2$  で離散化したものを比較、整理すると式(2)の表現にまとめることができる。

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t^n}{2} \tilde{T}^1 \mathbf{v}_n^+ + \frac{\Delta t^n}{2} \tilde{T}^2 \mathbf{v}_{n+1} \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (2)$$

このとき、

$$\tilde{T}^1 = T^2 + \alpha \frac{T^1}{3} + (1-\alpha) T^1 T^2, \quad \tilde{T}^2 = T^2 - \alpha \frac{T^1}{3} - (1-\alpha) T^1 T^2 \quad (3)$$

とし、 $\alpha=1$  で uv-ST/FEM,  $\alpha=0$  で v-ST/FEM に対応する。また、uv-ST/FEM では  $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}_n^-$ , v-

ST/FEM では  $\tilde{u}^n = \mathbf{u}_n$  である. すなわち, v-ST/FEM と uv-ST/FEM の違いは時間方向の変位の内挿にあり, 式(2)及び(3)において, パラメータ  $\alpha$  を変えるだけで同一のプログラムで様々な Space-Time 有限要素法による解析が可能となる. この一般化に基づいた手法が Generalized v-ST/FEM である. なお採用する  $\tilde{T}^1, \tilde{T}^2$  の形状は無制限通り考えられる.

### 3. 解析結果

図1に示す弾性直方体に対する3次元衝突問題を, Generalized v-ST/FEM によって数値解析を行う.  $\tilde{T}^1, \tilde{T}^2$  の形状は式(3)を採用した. 自由端(上部)では, 図1の赤で示した中心領域にのみ  $0.0005$  秒の間に  $1.0 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> の衝撃力(矩形波)を作用させた. 弾性体の大きさは  $L=2.5$  m,  $B=2.5$  m,  $H=1.3$  m である. 密度と弾性係数は  $2500$  kg/m<sup>3</sup> と  $1.0 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> であり, ポアソン比は  $0.2$  とした. 要素幅は  $0.1$  m, 時間ステップ幅は  $1.0 \times 10^{-4}$  秒とした.

図2は,  $t=0.0010$  秒における各節点での速度の大きさを示しており, 同図の(a)がパラメータ  $\alpha=1$  のとき (uv-ST/FEM), (b)が  $\alpha=0$  のとき (v-ST/FEM) の結果に対応している. 図2より, 両手法では全体的な傾向は一致している. ただし(b)では, 上面中心部に与えた衝撃力にやや遅れる形で新たに速度の大きい部分が生じている. これは衝撃力の不連続な点 ( $t=0.0005$  秒) で発生した減衰すべき高周波成分が残っている影響と考えられる.

### 4. まとめ

v-ST/FEM と uv-ST/FEM の違いは, 時間方向の変位の内挿 (式(3)の  $\tilde{T}^1, \tilde{T}^2$ ) である. 両手法を一般化した Generalized v-ST/FEM ではその内挿を変えることで, 前述の2手法を含めた様々なタイプの Space-Time 有限要素法による解析が可能になる.

参考文献: Sharma, V., Fujisawa, K. and Murakami, A.: Velocity-based time discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics. *Soils and foundations*, 58(2), 491-510, 2018.

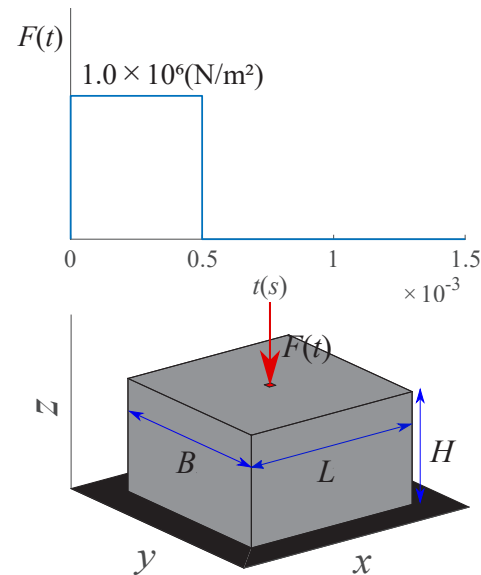


図1 三次元衝突問題

Fig.1 3D body with impulsive loading

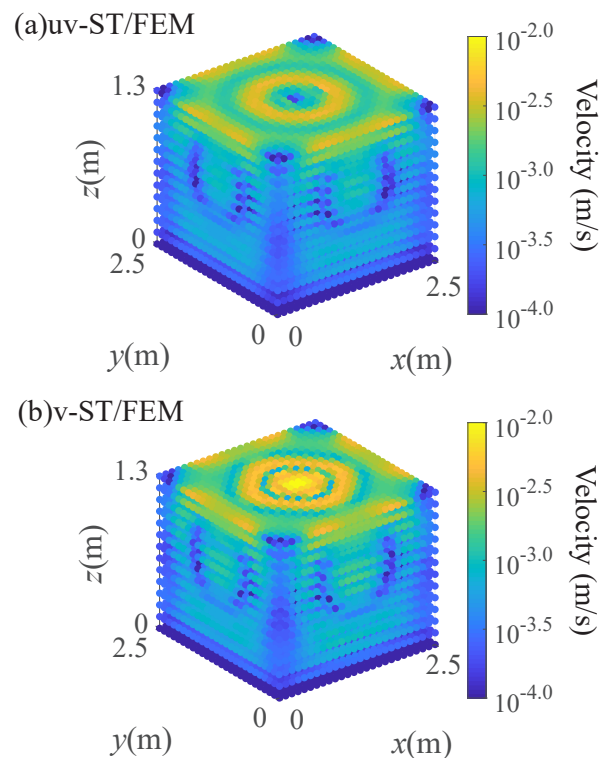


図2 変位速度の時間分布

Fig.2 Computed velocity field